

IV.2 Ecuaciones equivalentes con una incógnita

Definición: Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Las ecuaciones $5x + 7 = 2$ y $x = -1$ son equivalentes, las dos ecuaciones tienen el mismo conjunto solución, $\{-1\}$.

Dichos conjuntos de algunas ecuaciones resultan ser obvios por inspección. El conjunto solución de la ecuación $x + 4 = 10$ es $\{6\}$, ya que este número es el único que sumado con 4 da por resultado 10. El conjunto solución de la ecuación $5x - 2 = 3(x + 4)$ no es tan obvio.

Teorema 1

Si P , Q y T son polinomios en una misma variable y $P = Q$ es una ecuación, entonces $P = Q$ y $P + T = Q + T$ son equivalentes.

El teorema 1 dice que, dada una ecuación $P = Q$, es posible sumar cualquier polinomio T en la misma variable que P y Q a ambos miembros de la ecuación, obteniéndose así una ecuación equivalente $P + T = Q + T$.

Las ecuaciones $4x - 1 = 3x + 5$ y $4x - 1 + (1 - 3x) = 3x + 5 + (1 - 3x)$ la cual se reduce a $x = 6$, son equivalentes. Su conjunto solución es $\{6\}$.

Teorema 2

Si P y Q son polinomios en la misma variable, $a \in R$, $a \neq 0$, y si $P = Q$ es una ecuación, entonces $P = Q$ y $aP = aQ$ son equivalentes.

El teorema 2 establece que, dada una ecuación $P = Q$, podemos multiplicar ambos miembros de ella por un número real $a \neq 0$, obteniéndose así una ecuación equivalente $aP = aQ$.

Las dos ecuaciones $x = 2$ y $5(x) = 5(2)$, esto es, $5x = 10$, son equivalentes. Su conjunto solución es $\{2\}$.

Cuando ambos miembros de una ecuación se multiplican por una constante diferente de cero, la ecuación resultante es equivalente a la original. Sin embargo, cuando dichos miembros se multiplican por una expresión que contiene a la variable, la ecuación resultante puede no ser equivalente a la original.

Las dos ecuaciones $2x = 8$ y $x(2x) = x(8)$, esto es, $2x^2 = 8x$, no son equivalentes. El conjunto solución de la ecuación $2x = 8$ es $\{4\}$, mientras que el de $2x^2 = 8x$ es $\{0, 4\}$.

Las dos ecuaciones $x = 3$ y $x(x + 2) = 3(x + 2)$ no son equivalentes. El conjunto solución de $x = 3$ es $\{3\}$, mientras que el de $x(x + 2) = 3(x + 2)$ es $\{-2, 3\}$.

De manera semejante, si elevamos ambos miembros de una ecuación a cualquier potencia, diferente de cero o uno, la ecuación resultante puede no ser equivalente a la original.

Las ecuaciones $x = 5$ y $(x)^2 = (5)^2$, es decir, $x^2 = 25$, no son equivalentes. El conjunto solución de $x = 5$ es $\{5\}$, mientras que el de $x^2 = 25$ es $\{-5, 5\}$.

Nota: El conjunto solución de una ecuación lineal en una variable tiene exactamente un elemento.