IV.4 Ecuaciones fraccionarias con una incógnita

Una ecuación es **fraccionaria** cuando algunos de sus términos o todos tienen denominadores, como $\frac{x}{2} = 3x - \frac{3}{4}$

Supresión de denominadores
Consiste en convertir una ecuación fraccionaria en una ecuación equivalente entera, es decir, sin denominadores.

La supresión de denominadores se funda en la propiedad, ya conocida, de las igualdades: **Una igualdad no varía si sus dos miembros se multiplican por una misma cantidad.**

Regla: Para suprimir denominadores en una ecuación se multiplican todos los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplos:

1. Suprimir denominadores de la ecuación $\frac{x}{2} = \frac{x}{6} - \frac{1}{4}$

El m. c. m. de los denominadores 2, 6 y 4 es 12. Multiplicamos todos los términos por 12 y tendremos:

$$\frac{12x}{2} = \frac{12x}{6} - \frac{12}{4}$$

Simplificando estas fracciones, queda: $6x = 2x - 3$

Podemos decir entonces que **para suprimir denominadores en una ecuación**:

1) Se halla el m. c. m. de los denominadores.
2) Se divide este m. c. m. entre cada denominador y cada cociente se multiplica por el numerador respectivo.

2. Suprimir denominadores en $2 - \frac{x-1}{40} = \frac{2x-1}{4} - \frac{4x-5}{8}$

El m. c. m. de 4, 8 y 40 es 40. El primer término 2 equivale a $\frac{2}{1}$.
Entonces, se divide 40 ÷ 1 = 40 y este cociente se multiplica por 2; 40 ÷ 40 = 1 y este cociente 1 se multiplica por x – 1; 40 ÷ 4 = 10 y este cociente 10 se multiplica por 2x – 1; 40 ÷ 8 = 5 y este cociente 5 se multiplica por 4x – 5 y tendremos:
2 (40) – (x – 1) = 10 (2x – 1) – 5 (4x – 5)
Efectuando las multiplicaciones indicadas y quitando paréntesis, queda:

$$80 - x + 1 = 20x - 10 - 20x + 25$$

Ecuación que ya es entera.

MUY IMPORTANTE

Cuando una fracción cuyo numerador es un polinomio está precedida del signo **–** como $-\frac{x-1}{40}$ y $-\frac{4x-5}{8}$ en la ecuación anterior, hay que tener cuidado de cambiar el signo a cada uno de los términos de su numerador al quitar el denominador. Por eso hemos puesto x **–** 1 entre un paréntesis precedido del signo **–** o sea $-(x-1)$ y al quitar este paréntesis queda $-x+1$ y en cuanto a la última fracción, al efectuar el producto $-5(4x-5)$ decimos: $(-5)(4x)=-20x$ y $(-5)\times(-5)=+25$, quedando $-20x+25$.

Un tipo muy especial de ecuaciones que contienen fracciones son las que tienen por lo menos en algún denominador a la variable cuyo conjunto solución se está buscando. En este tipo de ecuaciones algunas operaciones no dan ecuaciones equivalentes. Por ejemplo:

Sea la ecuación fraccionaria $\frac{1}{x-3}=1-\frac{2x-7}{x-3}$

El $MCM = x-3$ $\qquad (x-3)\left(\frac{1}{x-3}\right)=(x-3)\left(1-\frac{2x-7}{x-3}\right)$

$$1=(x-3)-(x-3)\frac{2x-7}{x-3}$$
$$1=x-3-2x+7$$
$$x=3$$

estas ecuaciones no son equivalentes a la original, porque el conjunto solución es {3} para ambas, pero no para la ecuación original que entonces sería ϕ.

Sustituyendo tenemos $\frac{1}{(3)-3}=1-\frac{2(3)-7}{(3)-3}$ y vemos que con ese valor para x los números quedan indefinidos:

$$\frac{1}{0}=1-\frac{-1}{0}$$

En otras palabras, podemos decir que en las ecuaciones fraccionarias el Universo para la variable ya no son todos los números reales y deben excluirse aquellos valores que hagan que un denominador cualquiera sea 0; en nuestro ejemplo excluiríamos al número 3 escribiendo la ecuación como sigue:

$$\frac{1}{x-3}=1-\frac{2x-7}{x-3} \quad \{x \mid x\neq 3\}$$

con lo que indicamos que ese valor no puede pertenecer al conjunto solución; generalmente al plantear la ecuación no se excluyen números de su conjunto de reemplazamiento, considerándose tentativamente que son todos los números reales y ya obtenido un conjunto solución, se prueban sus elementos en la ecuación original excluyéndose los que no satisfacen a la ecuación. Ejemplo:

Encontrar el conjunto solución para x.

$$\frac{2x-11}{x-2}=1-\frac{7}{x-2}$$

$$(x-2)\left(\frac{2x-11}{x-2}\right)=(x-2)\left(1-\frac{7}{x-2}\right)$$
$$2x-11=(x-2)-(7)$$
$$2x-11=x-9$$
$$x-11=-9$$
$$x=2$$

Comprobación: $\frac{2(2)-11}{(2)-2}=1-\frac{7}{(2)-2}$

$$\frac{-7}{0}=1-\frac{7}{0}$$

Con el elemento 2 la igualdad tiene un valor de verdad indefinido y siendo 2 la única solución encontrada, la solución a la ecuación original será ϕ.