I.5 Operaciones con expresiones algebraicas

Suma y resta de expresiones algebraicas

Si consideramos que las literales de las expresiones algebraicas representan números reales, entonces, cada expresión algebraica representa a su vez un número real y por esta razón debe cumplir como todo número real, con los postulados y teoremas vistos hasta aquí.

Para determinar la suma o la resta de las expresiones algebraicas, operación llamada también **reducción de términos semejantes**, aplicamos los postulados asociativo, conmutativo y distributivo.

Ejemplos:

a) Sumar $2x+3y-4$ con $x-y+2$

$(2x+3y-4)+(x-y+2)$	Dado
$=(2x+x)+(3y-y)+(-4+2)$	Postulado conmutativo y asociativo
$=(2+1)x+(3-1)y+(-4+2)$	Postulado distributivo
$=3x+2y+(-2)$	Propiedad de sustitución
$=(2x+3y-4)+(x-y+2)=3x+2y-2$	Teorema de la resta

b) Restarle a $2x^3+3x-2y^2+3$, la expresión $2x-y^2-2$

$(2x^3+3x-2y^2+3)-(2x-y^2-2)$	Dado
$=2x^3+3x-2y^2+3-2x+y^2+2$	Teorema $-(a+b)=-a-b$
$=2x^3+(3x-2x)+(-2y^2+y^2)+(3+2)$	Postulado conmutativo y asociativo
$=2x^3+(3-2)x+(-2+1)y^2+(3+2)$	Postulado distributivo
$=2x^3+x+(-1)y^2+5$	Propiedad de sustitución
$=2x^3+x-y^2+5$	Teorema sobre signos

De los ejemplos anteriores podemos considerar las operaciones de sumar y restar condensadas en los siguientes pasos:

1º) Eliminar todos los paréntesis o símbolos de asociación aplicando los teoremas sobre inversos que correspondan.
2º) Identificar los términos semejantes y asociarlos aplicando el postulado conmutativo cuando sea necesario.
3º) Operar sólo con los coeficientes de los términos semejantes (esto corresponde en los ejemplos a la aplicación del postulado distributivo).

Multiplicación de expresiones algebraicas

Consideremos ahora las siguientes dos expresiones algebraicas: $(x+y)$ y $(2x+3y)$, si las multiplicamos, su producto quedaría indicado así: $(x+y)\cdot(2x+3y)$ aplicando el postulado distributivo se transformaría en: $(x+y)\cdot 2x+(x+y)\cdot 3y$ y volviendo a distribuir: $(x\cdot 2x+y\cdot 2x)+(x\cdot 3y+y\cdot 3y)$ que con la definición de potencia y postulados conmutativo y asociativo se puede escribir como: $(2x^2+2xy)+(3xy+3y^2)$ y reduciendo términos semejantes queda: $2x^2+5xy+3y^2$.

La aplicación sucesiva del postulado distributivo hasta donde sea posible, y la reducción de términos semejantes conducen a la multiplicación de las expresiones algebraicas. Para fines prácticos esta operación se efectúa siguiendo el procedimiento que se indica y que equivale a lo anterior.

1º) Se escriben los multinomios uno abajo del otro, ordenando los términos con la potencia descendente de una letra.
2º) Se multiplica cada término del multinomio inferior por todos los términos del multinomio de arriba, procurando que cada término se escriba inmediatamente abajo de su semejante para facilitar la reducción de términos semejantes.
3º) Se reducen términos semejantes.

Ejemplo: $(x^2+2xy+3y^2)\cdot(x-2y)$ ya están ordenados con las potencias de la x.

$$\begin{array}{l} x^2+2xy+3y^2 \\ x-2y \\ \hline x^3+2x^2y+3xy^2 \\ \quad -2x^2y-4xy^2-6y^3 \\ \hline x^3+0x^2y-xy^2-6y^3 \end{array}$$

$$(x^2+2xy+3y^2)\cdot(x-2y)=x^3-xy^2-6y^3$$

NOTA: El término con coeficiente cero, tiene valor cero independientemente de los valores que se asignen a la “x” y a la “y”, de modo que se omite en la respuesta por el postulado de identidad.

División de expresiones algebraicas

Para la división de expresiones algebraicas utilizaremos el siguiente teorema:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}, c\neq 0$$

En el teorema anterior se representa la división de un binomio entre un monomio; este resultado, junto con los postulados asociativo y conmutativo, nos permite dividir cualquier expresión algebraica entre un monomio.

Ejemplos:

a) Divídase $12x^4y^3+36x^3y^4-24x^2y$ entre $3x^2y^2$

$$\frac{12x^4y^3+(36x^3y^4-24x^2y)}{3x^2y^2}=\frac{12x^4y^3}{3x^2y^2}+\frac{36x^3y^4-24x^2y}{3x^2y^2}$$

$$=\frac{12x^4y^3}{3x^2y^2}+\frac{36x^3y^4}{3x^2y^2}-\frac{24x^2y}{3x^2y^2}$$

$$= \frac{3 \cdot 4x^4 y^3}{3x^2 y^2} + \frac{3 \cdot 12x^3 y^4}{3x^2 y^2} - \frac{3 \cdot 8x^2 y}{3x^2 y^2}$$

$$= 4x^2 y + 12xy^2 - \frac{8}{y}$$

Ahora consideraremos la división de dos polinomios en una misma letra; el procedimiento es semejante al de la división aritmética.

1. Divídase el primer término del dividendo entre el 1er. Término del divisor.
2. Multiplíquese el cociente obtenido, por cada término del divisor y réstese el producto obtenido del dividendo.
3. Divídase el primer término del resultado de la resta para obtener el segundo término del cociente y con él repítase la operación indicada en el número 2.
4. Continúese el proceso hasta que el resultado de la resta sea cero o un polinomio de menor grado que el polinomio divisor; a este resultado se le llama residuo de la división.

Ejemplos:

1) Divídase $y^3 - 4y^2 + 5y - 2$ entre $y - 1$

Dividendo $P(y) = y^3 - 4y^2 + 5y - 2$ de tercer grado

Divisor $D(y) = y - 1$ de primer grado

$$\begin{array}{r|l}
 & y^2 - 3y + 2 \\
y - 1 & y^3 - 4y^2 + 5y - 2 \\
 & \underline{-y^3 + y^2} \\
 & -3y^2 + 5y - 2 \\
 & \underline{3y^2 - 3y} \\
 & 2y - 2 \\
 & \underline{-2y + 2} \\
 & 0
\end{array}$$

Paso 1) $\frac{y^3}{y} = y^2$

Paso 2) $y^2(y-1) = y^3 - y^2$

Paso 3) $\frac{-3y^2}{y} = -3y$

Paso 2) $-3y(y-1) = -3y^2 + 3y$

Paso 4) $\frac{2y}{y} = 2$

Paso 2) $2(y-1) = 2y - 2$

Si llamamos $C(y)$ al polinomio del cociente y R al residuo, la división se podría representar como sigue: $\frac{P(y)}{D(y)} = C(y)$ cuando el residuo es 0.

$$\frac{y^3 - 4y^2 + 5y - 2}{y - 1} = y^2 - 3y + 2$$