VI.1. Sistema de ecuaciones con dos incógnitas

ECUACIONES SIMULTÁNEAS
Dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas son simultáneas cuando se satisfacen para iguales valores de las incógnitas.

Por ejemplo, las siguientes ecuaciones son simultáneas porque $x = 3$, $y = 2$ satisfacen ambas ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

ECUACIONES EQUIVALENTES
Son las que se obtienen una de la otra.

Por ejemplo, las siguientes ecuaciones son equivalentes porque dividiendo por 2 la segunda ecuación se obtiene la primera.

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

Las ecuaciones equivalentes tienen infinitas soluciones comunes.

Ecuaciones independientes son las que no se obtienen una de la otra.

Cuando las ecuaciones independientes tienen una sola solución común son simultáneas.

Así, las ecuaciones $\begin{matrix} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{matrix}$ son independientes porque no se obtienen una de la otra y simultáneas porque el único par de valores que satisface ambas ecuaciones es $x = 3,\ \ y = 2$.

Ecuaciones incompatibles son ecuaciones independientes que no tienen solución común.

Por ejemplo, las ecuaciones $\begin{matrix} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{matrix}$ son incompatibles porque no hay ningún par de valores de x e y que verifique ambas ecuaciones.

SISTEMA DE ECUACIONES es la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas.

Por ejemplo: $\begin{matrix} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{matrix}$ es un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Solución de un sistema de ecuaciones es un grupo de valores de las incógnitas que satisface todas las ecuaciones del sistema. La solución del sistema anterior es $x = 2,\ \ y = 3$.

Un sistema de ecuaciones es posible o compatible cuando tiene solución y es imposible o incompatible cuando no tiene solución.

Un sistema compatible es determinado cuando tiene una sola solución e indeterminado cuando tiene infinitas soluciones.

RESOLUCIÓN

Para resolver un sistema de dos ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas es necesario obtener de las dos ecuaciones dadas una sola ecuación con una incógnita. Esta operación se llama **Eliminación**.

MÉTODOS DE ELIMINACIÓN MÁS USUALES

Son tres: Método de **igualación**, de **comparación** y de **reducción**, también llamado este último de **suma** o **resta**.

I. ELIMINACIÓN POR IGUALACIÓN

Resolver el sistema $\begin{array}{l} 7x+4y=13\_\_\_ecuaión(1) \\ 5x-2y=19\_\_\_ecuación(2) \end{array}$

Despejemos una cualquiera de las incógnitas; por ejemplo x, en ambas ecuaciones.

Despejando x en (1): $7x=13-4y \quad \therefore \quad x=\frac{13-4y}{7}$

Despejando x en (2): $5x=19+2y \quad \therefore \quad x=\frac{19+2y}{5}$

Ahora se **igualan** entre sí los dos valores de x que hemos obtenido:

$$\frac{13-4y}{7}=\frac{19+2y}{5}$$

y ya tenemos una sola ecuación con una incógnita; hemos eliminado la x.
Resolviendo esta ecuación:

$$\begin{array}{l} 5(13-4y)=7(19+2y) \\ 65-20y=133+14y \\ -20y-14y=133-65 \\ -34y=68 \\ y=-2 \end{array}$$

Sustituyendo este valor de y en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1), se tiene:

$$\begin{array}{l} 7x+4(-2)=13 \\ 7x-8=13 \\ 7x=21 \\ x=3 \end{array}$$

Solución: $\begin{array}{l} x=3 \\ y=-2 \end{array}$

VERIFICACIÓN: Sustituyendo $x=3, \quad y=-2$ en las dos ecuaciones dadas, ambas se convierten en identidad.

II. ELIMINACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Resolver el sistema $\begin{array}{l} 2x+5y=-24 \_\_\_(1) \\ 8x-3y=19 \_\_\_\_(2) \end{array}$

Despejemos una cualquiera de las incógnitas, por ejemplo x, en la ecuación (1)

$$2x=-24-5y \therefore x=\frac{-24-5y}{2}$$

Este valor de x se sustituye en la ecuación (2)

$$8\left(\frac{-24-5y}{2}\right)-3y=19$$

y ya tenemos una ecuación con una incógnita; hemos eliminado la x.
Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} &4(-24-5y)-3y=19 \\ &-96-20y-3y=19 \\ &-20y-3y=19+96 \\ &-23y=115 \\ &y=-5 \end{aligned}$$

Sustituyendo $y=-5$ en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1) se tiene:

$$\begin{aligned} &2x+5(-5)=-24 \\ &2x-25=-24 \\ &2x=1 \\ &x=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Solución: $\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ y=-5 \end{array}$

III. MÉTODO DE REDUCCIÓN

Resolver el sistema $\begin{array}{l} 5x+6y=20 \_\_\_\_(1) \\ 4x-3y=-23 \_\_\_(2) \end{array}$

En este método se hacen iguales los coeficientes de una de las incógnitas.
Vamos a igualar los coeficientes de *y* en ambas ecuaciones, porque es lo más sencillo.
El m.c.m de los coeficientes de *y*, 6 y 3, es 6.
Multiplicamos la segunda ecuación por 2 porque $2\times 3=6,$ y tendremos:

$$\begin{aligned} 5x+6y&=20 \\ 8x-6y&=-46 \end{aligned}$$

Como los coeficientes de *y* que hemos igualado tienen signos distintos, se suman estas ecuaciones porque con ello se elimina la *y*:

$$\begin{array}{l} 5x+6y=20 \\ \underline{8x-6y=-46} \\ 13x \qquad =-26 \\ x=\dfrac{-26}{13}=-2 \end{array}$$

Sustituyendo $x=-2$ en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1) se tiene:

$$5(-2)+6y=20$$
$$-10+6y=20$$
$$6y=30$$
$$y=5$$

Solución: $x=-2$, $y=5$